Quiz Semaine 7

Question 1

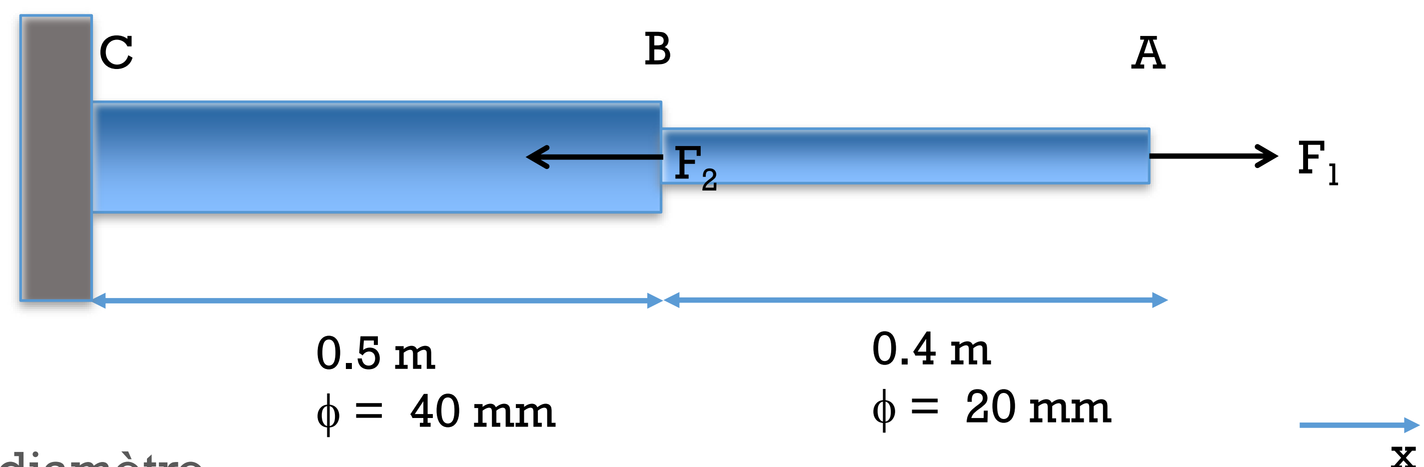
Déformation axiale en 2D

- **F_1 = 10 kN et F_2= 100 kN** Aluminium E = 70 GPa

Est-ce qu'il y a rupture ? Si oui, dans quel segment et est-ce une rupture due à une contrainte normale ou de cisaillement ? Avec **FS=1**

Contrainte limite normale: +/- 100 MPa

Contrainte limite de cisaillement: +/- 25 MPa



Phi : diamètre

Question 1

Déformation axiale

$A_{AB} = \pi/4\ d_{AB}^2 = \pi/4\ (0.020)^2 = 3.14 \times 10^{-4}\ m^2$

$A_{BC} = \pi/4\ d_{BC}^2 = \pi/4\ (0.040)^2 = 1.26 \times 10^{-3}\ m^2$

- **F_1 = 10 kN et F_2= 100 kN** Aluminium E = 70 GPa

Force interne N dans le segment AB is F_1

Force interne N dans le segment BC is $F_1 - F_2$

$\sigma_{maxAB} = N_{AB} / A_{AB} = F1 / A_{AB} = 31.8$ MPa

$\sigma_{maxBC} = N_{BC} / A_{BC} = F1\text{-}F2 / A_{BC} = -71.4$ MPa

$\tau_{maxAB} = \sigma_{maxAB} / 2 = F1 / 2A_{AB} = 15.9$ MPa

$\tau_{maxBC} = \sigma_{maxBC} / 2 = F1\text{-}F2 / 2A_{BC} = -35.7 \text{ MPa} > \tau_{yield} = +/- 25$ MPa

τ_{max} sur les plans à 45°

$$|\tau_{max}| = \frac{N}{A}\sin(\pi/4)\cos(\pi/4)$$

$$\boxed{|\tau_{max}| = \frac{N}{2A} = \frac{\sigma_{max}}{2}}$$

Question 2

Contraintes et Déformations en 3D

- Considérons un bloc fait d'un matériau isotropique sous charge:

E = 25 GPa

σ_x = - 150 MPa

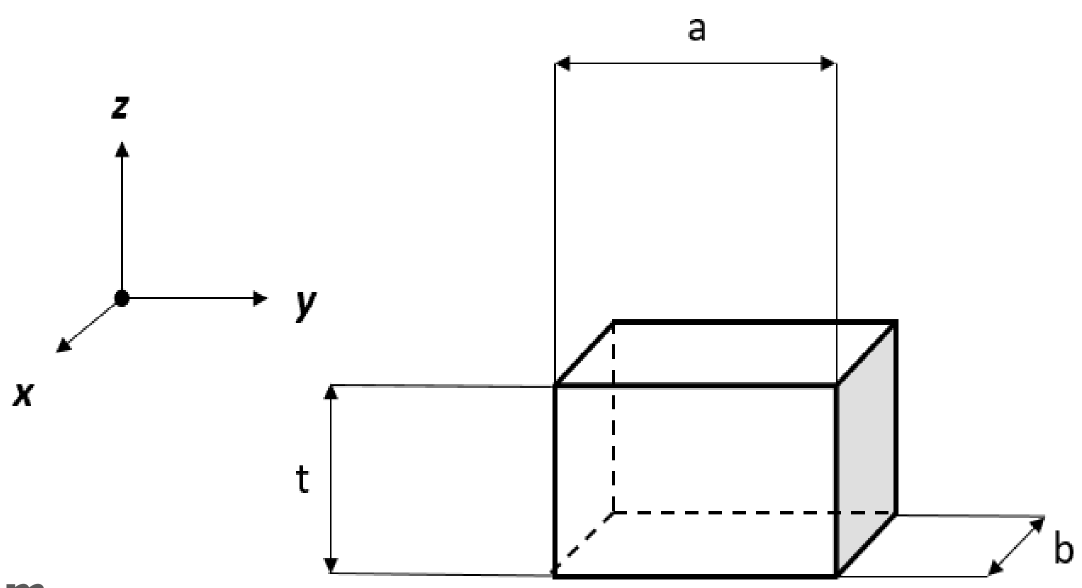
σ_z = - 25 Mpa

et σ_y inconnu

Elongation direction **axe**

des x: Δb = -0.125 mm

a= 25 mm, b = 20 mm, t = 12 mm



Quelle est la valeur de σ_y qui doit être appliquée pour avoir ε_z = 0 ?

Question 2

Contraintes et Déformations en 3D

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L_x}{L} \rightarrow \varepsilon_x = -0.00625$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_z}{\nu} - \sigma_x \qquad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) \rightarrow \sigma_y = -\frac{E}{\nu}\varepsilon_x + \frac{\sigma_x}{\nu} - \sigma_z \qquad (2)$$

Equa. (1)=(2)

$$\sigma_z - \nu\sigma_x = -E\varepsilon_x + \sigma_x - \nu\sigma_z \rightarrow \sigma_z + E\varepsilon_x - \sigma_x = -\nu(\sigma_z - \sigma_x)$$

$$\nu = -\frac{\sigma_z - \sigma_x + E\varepsilon_x}{\sigma_z - \sigma_x} = -1 - \frac{E\varepsilon_x}{\sigma_z - \sigma_x} = -1 + \frac{156.25\ \text{MPa}}{125\ \text{MPa}} = \frac{1}{4}$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_y = \frac{\sigma_z}{\nu} - \sigma_x = -4 \cdot 25\ \text{MPa} + 150\ \text{MPa} = 50\ \text{MPa}$$

$$\boxed{\sigma_y = 50\ \text{MPa}}$$

Question 3

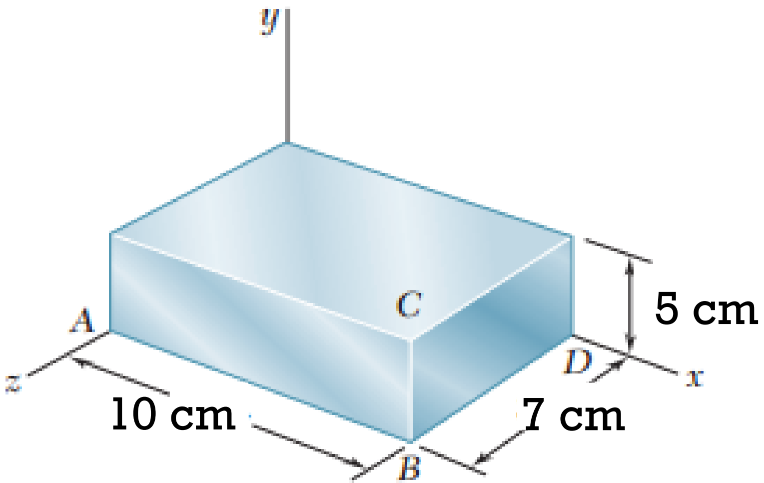
Loi de Hooke généralisée

Un bloc d'acier est entouré d'eau et est soumis à une pression hydrostatique uniforme '*P*' sur toutes les faces.

Le changement de la dimension AB est de -3.0×10^{-3} cm.

$E = 100$ GPa, $\nu = 0.29$

- *A) Trouver les changements pour les dimensions BC et BD*
- *B) Déterminer la pression P appliquée*
- *C) Calculer l'énergie de déformation relative*



Question 3

Loi de Hooke généralisée

- Solution A)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - v\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - v\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\delta x}{AB} = -3\cdot 10^{-3}/10 = -0.3\cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z = -0.3\cdot 10^{-3}$$

$$with\ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = -P$$

$$\delta y(BC) = -0.3\cdot 10^{-3}\cdot 5 = \mathbf{-1.5\cdot 10^{-3}\ cm}$$

$$\delta z(BD) = -0.3\cdot 10^{-3}\cdot 7 = \mathbf{-2.1\cdot 10^{-3}\ cm}$$

Question 3

Loi de Hooke généralisée

- Solution B)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - v\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - v\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - v\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = -P$ en compression

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1 - 2v)$$

$P = \varepsilon_x \cdot E/(1\text{-}2v) =$ **71 MPa**

Question 3

Loi de Hooke généralisée

- Solution C)

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = -P$ et $\tau=0$

Densité d'énergie de déformation relative:

$$u_0 = 0.5 \times 3 \times (-71 * 10^6 \times -0.3 \cdot 10^{-3}) = 31.95 \text{ kJ/m}^3$$

$V=3.5*10^{-4}\ \text{m}^3$

Énergie de déformation relative: $U = 31950 \times 3.5 \times 10^{-4} =$ **11.2 J**

Question 4

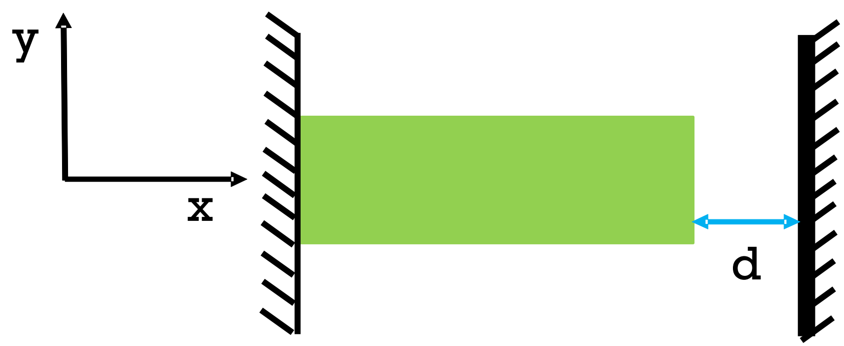
Densité d'énergie de déformation relative

- Considérer une barre circulaire fixée à son extrémité gauche. Un mur est placé à d=0.1 m sur la droite.

Le système est à 25 °C puis la température est augmentée de 90 °C.

L= 4 m, A= 2 m^2, E= 10 MPa, $\alpha = 40 \times 10^{-5}\ C^{-1}$

- **Déterminer la densité d'énergie de déformation relative de cette barre.**



Question 4

Densité d'énergie de déformation relative

- Solution (méthode 1 avec $u_o = \frac{1}{2} \cdot E \cdot (\varepsilon_{tot} - \varepsilon_T)^2$)

La température augmente de 90°C et induit la dilatation suivante sans mur:

$\varepsilon_{th} = \alpha \cdot \Delta T = 40 \times 10^{-5} \times 90 = 0.036$ **avec** $\Delta L_{th} = \varepsilon \times L = 0.144$ m

$\mathbf{\Delta L_T > d}$**,** donc:

$\Delta L_T + \Delta l_{mech,T} = d$

$\Delta l_{mech,T} = d - \Delta L_T$

$\Delta l_{mech,T} = 0.1 - 0.144 = -0.044$ m

$\varepsilon_{mech,T} = \Delta l_{mech,T} / L = -0.044/4 = -0.011$

$u_o = \frac{1}{2} \cdot E \cdot (\varepsilon_d - \varepsilon_{T,tot})^2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot (\varepsilon_{mech,T})^2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot (\varepsilon_{mech,T})^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \times 10^{6} \cdot (-0.011)^2 = 605 \text{ J/m}^3$

Question 4

Densité d'énergie de déformation relative

- Solution (méthode 2 avec $u_o = \frac{\sigma_x{}^2}{2E}$)

La température augmente de 90°C et induit la dilatation suivante sans mur:

$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T = 40 \cdot 10^{-5} \cdot 90 = 0.036$ **with** $\Delta L_T = \varepsilon \cdot L = 0.144$ m

ΔL_T > d, donc il y a une contrainte compressive (σ_x):

$\Delta L_T + \Delta l_{mech,T} = d$

$\Delta l_{mech,T} = d - \Delta L_T$

$\Delta l_{mech,T} = 0.1 - 0.144 = -0.044$ m

$\Delta l_{mech,T} = \varepsilon_{mech,T} \cdot L = (\sigma_x / E) \cdot L$

$\sigma_{x,T} = (\Delta l_{mech,T} \cdot E)/L = (-0.044 \times 10 \times 10^6)/4 = -110$ kPa

$$u_o = \frac{\sigma_x{}^2}{2E} = \frac{(-110 \times 10^3)^2}{2 \times 10 \times 10^6} = 605 \text{ J/m}^3$$

Question 5

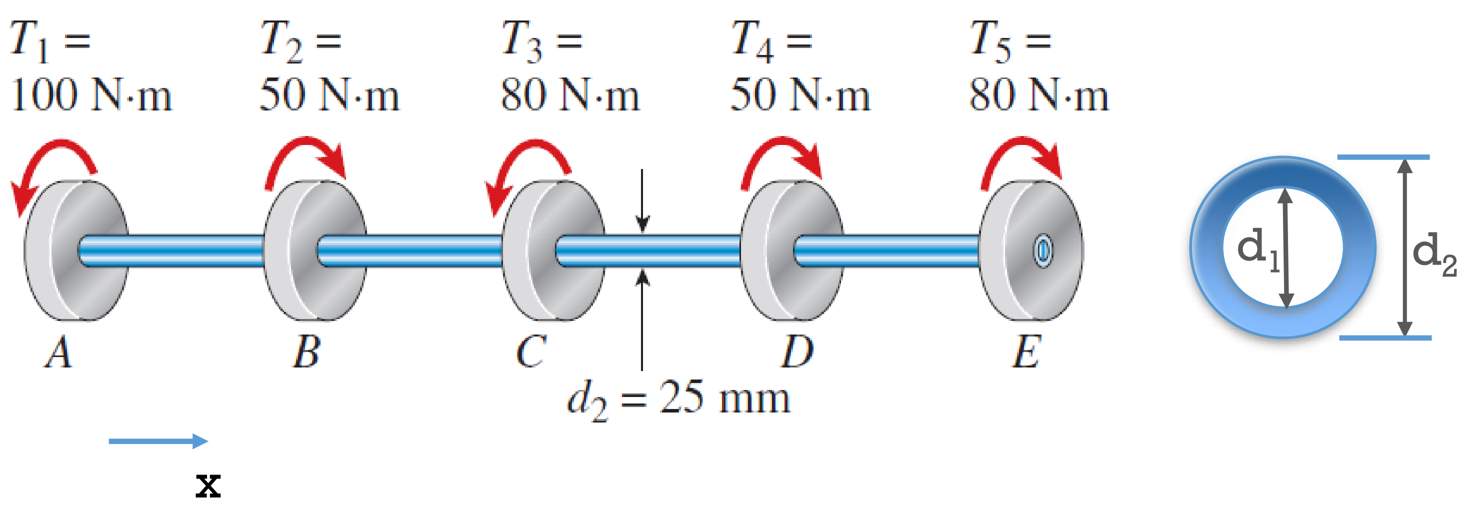
Arbre de transmission

- Un tube creux est soumis à 5 couples comme montré ci-dessous.

La contrainte limite en cisaillement est de 120 MPa (τ_{yield}).

Le diamètre extérieur d_2 = 25 mm.

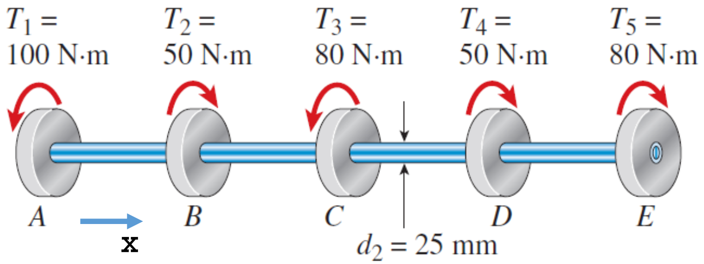
Quel est le diamètre maximal permis d_1 en considérant un facteur de sécurité $FS = 2$?



Question 5

Arbre de transmission

- Solution



Déterminer T_{int} max

$T_1 + T_{intAB} = 0 \qquad T_{intAB} = -100\ Nm$

$T_1 - T_2 + T_{intBC} = 0 \qquad T_{intBC} = -50\ Nm$

$T_1 - T_2 + T_3 + T_{intCD} = 0 \qquad T_{intCD} = -130\ Nm$

$- T_{intDE} - T_5 = 0 \qquad T_{intDE} = -80\ Nm$

$$\tau_{max} = \frac{\tau_{yield}}{2} = \frac{T_{intmax}\, c}{Ip}$$

$$Ip = \frac{2\, T_{intmax}}{\tau_{yield}} \, {d_2}/_{2}$$

$$Ip = \frac{2 \times 130}{120 \times 10^6} \, {0.025}/_{2}$$

$$Ip = 2.7083 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$Ip = \frac{\pi}{32}\left({d_2}^4 - {d_1}^4\right)$$

$${d_1}^4 = {d_2}^4 - \frac{32}{\pi} Ip$$

$$\boldsymbol{d_1 = 18.4\ mm}$$

Question 6

Torsion

Pour un tuyau mince non prismatique d'épaisseur constante *t* et diamètre variable *d et des couples appliqués aux* joints 2 et 3, déterminer:

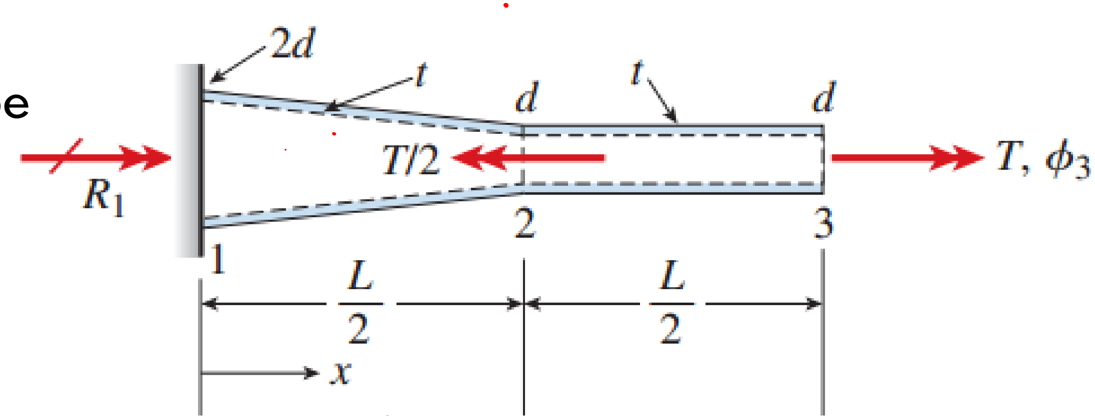
(a) Trouver le moment de réaction R_1

(b) Trouver une expression pour l'angle de rotation φ_3 au joint 3 en fonction du couple externe T.

Considérer G constant.

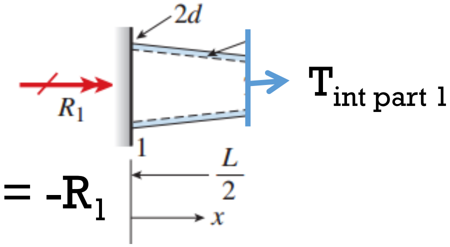
Formule pour un tube à paroi mince:

$I_p = 2\pi r^3 t = \pi d^3 t/4$

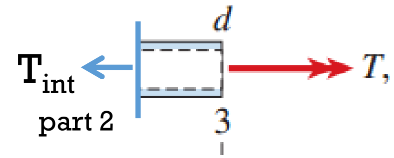


Question 6

Torsion



$\text{Tint}_1 = -R_1$



$\text{Tint}_2 = T$

(a) Reaction torque R_1

statics: $\Sigma T = 0$

$$R_1 - \frac{T}{2} + T = 0 \quad R_1 = \frac{-T}{2} \quad \leftarrow$$

(b) Rotation at joint 3

$$d_{12}(x) = 2d\left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}$$

$$d_{23}(x) = d \quad \frac{L}{2} \le x \le L$$

$$\phi_3 = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{T}{2}}{G\left(\frac{\pi}{4} d_{12}(x)^3 t\right)} dx$$

$$+ \int_{\frac{L}{2}}^{L} \frac{T}{G\left(\frac{\pi}{4} d_{23}(x)^3 t\right)} dx$$

use I_P expression for thin walled tubes

$$\phi_3 = \frac{2T}{G\pi t} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\left[2d\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]^3} dx$$

$$+ \frac{4T}{G\pi d^3 t} \int_{\frac{L}{2}}^{L} dx$$

$$\phi_3 = \frac{2T}{G\pi t} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{\left[2d\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right]^3} dx$$

$$+ \frac{2TL}{G\pi d^3 t}$$

$$\phi_3 = \frac{3TL}{8G\pi\, d^3 t} + \frac{2TL}{G\pi d^3 t}$$

$$\phi_3 = \frac{19TL}{8G\pi d^3 t} \quad \leftarrow$$